→ διανυσματική

Ορισμός: Έστω $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0$ σ.σ του U

Τότε λέμε ότι $\bar{f}$ συγκλίνει στο όριο $\bar{l} \in \mathbb{R}^m$, αν

$\forall (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\}$, $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$, $\bar{f}(\bar{x}_\nu) \to \bar{l}$,

και επειδή το όριο είναι μονοσήμαντο, γράφουμε $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{l}$

Ορισμός: Έστω $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^m$. Τότε λέμε ότι

$\bar{f}$ συνεχής στο $\bar{x}_0 \in U \iff \forall (\bar{x}_\nu) \subset U$, $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$, $f(\bar{x}_\nu) \to f(\bar{x}_0)$.

Παράδειγμα/άσκηση

Η $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\bar{x}) = \|\bar{x}\|$, είναι συνεχής.

Έστω $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Θνδο $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0)$

Έστω $(\bar{x}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$. Θνδο $\underbrace{f(\bar{x}_\nu)}_{=\|\bar{x}_\nu\|} \to \underbrace{f(\bar{x}_0)}_{=\|\bar{x}_0\|}$

Ισοδύναμα Θνδο $\big|\|\bar{x}_\nu\| - \|\bar{x}_0\|\big| \to 0$.

Όμως αφού $\bar{X}_\nu \to \bar{X}_0 \iff \bar{X}_\nu - \bar{X}_0 \to 0 \iff \|\bar{X}_\nu - \bar{X}_0\| \to 0$

Όμως $0 \leq \left| \|\bar{X}_\nu\| - \|\bar{X}_0\| \right| \leq \|\bar{X}_\nu - \bar{X}_0\|$ και άρα από

Θ. ισοσυγκλινουσών ακολουθιών $\left| \|\bar{X}_\nu\| - \|\bar{X}_0\| \right| \to 0$.

Άσκηση: Η $\bar{f}(\bar{x}) = \bar{x}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, είναι συνεχής

Λύση

Έστω $\bar{X}_0 \in U$ και $(\bar{X}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{X}_\nu \to \bar{X}_0$

Θνδο $\underbrace{\bar{f}(\bar{X}_\nu)}_{=\bar{X}_\nu} \to \underbrace{\bar{f}(\bar{X}_0)}_{=\bar{X}_0}$, που ισχύει λόγω υπόθεσης

Πρόταση: (α) Έστω $\bar{f}, \bar{g} : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$, X_0 σ.σ του U, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Τότε αν $\lim_{\bar{x} \to \bar{X}_0} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{l}$, $\lim_{\bar{x} \to \bar{X}_0} \bar{g}(\bar{x}) = \bar{m}$

$\Rightarrow \lim_{\bar{x} \to \bar{X}_0} (\alpha\bar{f} + \beta\bar{g})(\bar{x}) = \bar{l} + \bar{m}$

(Παρόμοια αυτής των $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με διαφορά στην χρήση νόρμας αντί της απόλυτης τιμής).

(β) Έστω $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{X}_0$ σσ του U

με $\lim_{\bar{x} \to \bar{X}_0} \bar{f}(\bar{x}) = \ell$, $\bar{h}: V \to \mathbb{R}^k$, $\bar{f}(U) \subset V \subset \mathbb{R}^m$,

$\bar{h}$ συνεχής στο $\bar{\ell}$. Τότε:

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{X}_0} (\bar{h} \circ \bar{f})(\bar{x}) = \bar{h}(\bar{\ell})$$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\bar{X}_\nu \to \bar{X}_0$. Θνδο: $\underbrace{(\bar{h} \circ \bar{f})(\bar{X}_\nu)} \to \bar{h}(\bar{\ell})$

$$= \bar{h}(\underbrace{\bar{f}(\bar{X}_\nu)}_{\to \bar{\ell}})$$

<u>Άσκηση</u>

Έστω ότι $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{X}_0 \in U$, συνεχής στο $\bar{X}_0$. Να δειχθεί ότι:

$\bar{g}: U \to \mathbb{R}$, $g(\bar{x}) = \|\bar{f}(\bar{x})\|$ είναι συνεχής στο $\bar{X}_0$

<u>Λύση</u> Έστω $\bar{X}_\nu \to \bar{X}_0$. Θνδο $\underbrace{g(\bar{X}_\nu)}_{= \|\bar{f}(\bar{X}_\nu)\|} \to \underbrace{g(\bar{X}_0)}_{= \|\bar{f}(\bar{X}_0)\|}$

Δηλαδή $\left| \|\bar{f}(\bar{X}_\nu)\| - \|\bar{f}(\bar{X}_0)\| \right| \to 0$.

Όμως:

$$0 \leq \left| \|\bar{f}(\bar{X}_\nu)\| - \|\bar{f}(\bar{X}_0)\| \right| \leq \|\bar{f}(\bar{X}_\nu) - \bar{f}(\bar{X}_0)\| \to 0$$

<u>Άσκηση</u>

Έστω $\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\bar{f}(\bar{x}) = \left(\|\bar{x}\|, \|\bar{x}\|^2, \dots, \|\bar{x}\|^m\right)$

Δείξτε ότι $\bar{f}$ συνεχής.

<u>Λύση</u>
Έστω $\bar{X}_0 \in \mathbb{R}^n$. Θνδο $\lim_{\bar{x} \to \bar{X}_0} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{X}_0)$

Έστω $\bar{X}_\nu \to \bar{X}_0$, θνδο $\bar{f}(\bar{X}_\nu) \to \bar{f}(\bar{X}_0)$

Αρκεί νδο $\|\bar{X}_\nu\|^i \to \|\bar{X}_0\|^i$, $\forall\ i = 1, \dots, m$

Όμως είδαμε η απεικόνιση $\bar{x} \mapsto \|\bar{x}\|$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, είναι συνεχής, δηλ αν $\bar{X}_\nu \to \bar{X}_0$, τότε $\|\bar{X}_\nu\| \to \|\bar{X}_0\|$

Οπότε $\|\bar{X}_\nu\| \to \|\bar{X}_0\| \Rightarrow \|\bar{X}_\nu\|^i \to \|\bar{X}_0\|^i$

Θεώρημα

(Η συνεχής εικόνα συμπαγούς συνόλου, είναι συμπαγής)

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ $\underbrace{\text{συμπαγές}}_{\text{κλειστό/φραγμένο}}$, $\bar{f} : U \to \mathbb{R}^m$ συνεχής.

Τότε $\bar{f}(U) \subset \mathbb{R}^m$ συμπαγές

Πόρισμα: Έστω $f : U \to \mathbb{R}$ συνεχής, $U \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές.

Τότε $f(U) \subset \mathbb{R}$ είναι συμπαγές και ειδικότερα, λαμβάνει μέγιστο και ελάχιστο.
Δηλαδή $\exists\, \bar{x}_1 \in U, \bar{x}_2 \in U : \forall\, \bar{x} \in U,\ f(\bar{x}) \in [f(\bar{x}_1), f(\bar{x}_2)]$
με $\bar{x}_1$ σημείο (ολικού) ελαχίστου, $\bar{x}_2$ σημείο (ολικού) μεγίστου και $f(\bar{x}_1)$ ελάχιστο και $f(\bar{x}_2)$ μέγιστο.